



“Sapienza” Università di Roma
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Fisica

**Determinazione sperimentale dei diversi regimi di
deflusso di sistemi liquidi e granulari**

Tesi di Laurea Triennale in Fisica

Relatore
Dr. Tullio Scopigno

Laureanda
Irene Bongioanni

Anno Accademico 2007-2008

Indice

Sommario	1
1 Introduzione	2
1.1 La materia granulare	2
1.2 I fluidi: alcune approssimazioni	6
2 Risultati sperimentali	8
2.1 Flusso di sabbia da una clessidra	11
2.2 Flusso di acqua in regime bernoulliano	12
2.3 Flusso di acqua in regime fortemente viscoso	14
3 Discussione dei risultati	17
Conclusioni	25
Bibliografia	26

Sommario

In questa dissertazione ci si propone di analizzare e comprendere alcune caratteristiche di un materiale granulare (sabbia); si è soffermata in particolare l'attenzione sul comportamento in regime di deflusso da un orifizio di circa 1mm di diametro (una clessidra). Verrà mostrato sperimentalmente, mediante l'acquisizione e l'analisi di video digitali, come i materiali granulari presentino proprietà differenti rispetto agli altri stati della materia. In particolare, sarà effettuato un confronto con un fluido normale (acqua) al fine di evidenziare un aspetto molto interessante: il flusso di un granulare attraverso un piccolo foro è costante nel tempo, contrariamente a quello che accade per un liquido. Questa caratteristica dei granulari è stata sfruttata nei secoli per fornire una corretta misura dello scorrere del tempo.

La presente dissertazione è articolata in tre capitoli. Il primo costituisce una sezione introduttiva riguardante la materia granulare e le sue proprietà fisiche, incentrata in particolare sulle principali differenze tra granulari e fluidi. Il secondo capitolo è dedicato alla descrizione della procedura sperimentale e dell'analisi dati, che ha consentito di elaborare immagini digitali e di estrarre da esse le leggi del moto nei tre casi di interesse, e alla discussione dei risultati ottenuti; nel terzo ed ultimo capitolo vengono ricavate le curve teoriche che descrivono il moto nei tre casi studiati e viene effettuato un confronto tra i diversi regimi analizzati e quanto noto dalla letteratura.

Capitolo 1

Introduzione

1.1 La materia granulare

Per materia granulare si intende un insieme di particelle solide, di dimensioni sufficienti a non renderle soggette a fluttuazioni o moti termici. Il limite inferiore per le dimensioni di tali particelle è di circa $1\mu m$, al di sotto del quale si presenterebbero caratteristiche colloidali¹. Il comportamento di un materiale di questo tipo, solido ma suddiviso in granelli più o meno fini è piuttosto diverso da quello dello stesso materiale allo stato solido, liquido o di gas. Ciò equivale a dire che i materiali granulari mostrano caratteristiche simili ai fluidi newtoniani (la loro viscosità non varia con la velocità con cui vengono misurati), ma dissipano energia molto rapidamente, e presentano, a seconda della loro energia, caratteristiche di solidi, liquidi o gas.

A differenza dei liquidi, i granulari non necessariamente tendono ad acquisire la forma del recipiente nel quale sono contenuti; ad esempio, se un recipiente viene riempito con un materiale granulare, inclinato ad un certo angolo e poi riportato nella posizione di equilibrio, esso potrà assumere, alla superficie, una forma che dipenderà strettamente dall'angolo di inclinazione e dalla velocità con cui il sistema è stato riportato nello stato iniziale. Inoltre, e questo sarà un fattore fondamentale per la verifica che si vuole effettuare, nel caso di un granulare la pressione esercitata a varie profondità non segue un andamento lineare come per i liquidi; questo dipende dal fatto che l'attrito tra le particelle e le pareti del contenitore è sufficiente a compensare l'aggiunta di materiale (parte della spinta del materiale in aggiunta si scarica sulle pareti) [1].

Un'altra caratteristica peculiare dei materiali granulari, in particolare della sabbia, è la seguente: quando le dimensioni dei granelli sono piccole ($\sim 10 - 100\mu m$), si ha flusso

¹un colloide è una sostanza che si trova in uno stato finemente disperso, intermedio tra la soluzione omogenea e la dispersione eterogenea

continuo solo in un piccolo intervallo del parametro adimensionale R/r , dove R è il raggio del foro di uscita del materiale e r è il raggio del granello, cioè per

$$2 < R/r < 12 \quad (1.1)$$

Per particelle grandi ($R/r \sim 2$) il flusso è discontinuo a causa della formazione di archi stabili nel foro; per particelle piccole ($R/r > 12$), il flusso è intermittente con una frequenza temporale ben definita. In quest'ultimo caso, il sistema manifesta una straordinaria sensibilità al rumore esterno, ai cambiamenti nella temperatura e alle interazioni tra le particelle. Tale regime è causato, nel caso particolare di una clessidra, dalle complesse interazioni tra la pressione del gas (aria) presente nella clessidra, e la pressione dovuta ai meccanismi di contatto all'interno della sabbia [2].

I materiali granulari, nonostante la loro forte presenza nella nostra vita quotidiana, costituiscono sistemi piuttosto complessi e di difficile interpretazione fisica; non è infatti possibile ottenere una spiegazione soddisfacente delle loro proprietà fisiche, e dei fenomeni ad essi correlati, partendo dalle leggi che regolano gli altri stati della materia. Per capire meglio quali siano le differenze sostanziali tra i granulari e i solidi o i liquidi, viene analizzato un caso particolare: il flusso di sabbia in una clessidra. La sabbia, tipico esempio di materia granulare, all'interno di una clessidra non si comporta come un fluido normale; si verifica infatti che la pressione, e dunque la velocità di efflusso, non seguono l'andamento previsto per i fluidi, cioè non decrescono man mano che la parte superiore della clessidra si svuota. Questo fenomeno è dovuto essenzialmente al fatto che in un sistema granulare, come già accennato in precedenza, le forze si trasmettono in modo fortemente disomogeneo, al punto da creare una pressione molto intensa sulle pareti, lasciando invece il materiale sottostante quasi senza pressione.

Lo studio di questi materiali particolari ha suscitato fin dall'antichità notevole interesse, ma è stato poi accantonato a causa della loro complessa natura; solo recentemente ci si è resi conto che non è utile focalizzarsi sull'aspetto microscopico dei granulari, vale a dire studiare le caratteristiche del singolo granello, ma si ottengono risultati soddisfacenti guardando ad essi nel loro insieme, come sistemi macroscopici. Per essere precisi, il livello appropriato di descrizione è quello *mesoscopico*: si ignora completamente la struttura interna dei grani che compongono il sistema, cioè si trascurano tutti i processi con cui l'energia meccanica si trasforma in calore. Una notevole conseguenza di questo tipo di approccio consiste nel fatto che, trascurando i moti microscopici interni, un sistema di granulari può sempre essere considerato in quiete. In aggiunta a ciò, è interessante osservare che i sistemi granulari, a causa delle forze dissipative, non raggiungono quasi mai l'equilibrio termico; infatti, l'energia potenziale tipica di un granello è data da

$$U=mgd \quad (1.2)$$

dove d è il diametro ed m la massa del granello, e risulta circa 10^{12} volte maggiore delle fluttuazioni tipiche dell'energia termica ($\sim K_B T$). Conseguenza immediata e non banale di ciò è che sistemi di questo tipo, a fini pratici, possono sempre essere considerati a temperatura nulla. Solo in presenza di una perturbazione esterna, dunque, tali sistemi modificano il loro stato e possono assumere, a seconda delle circostanze, comportamenti tipici di fluidi o solidi. I materiali granulari, quindi, in assenza di agenti esterni, presentano comportamenti molto simili a quelli dei sistemi disordinati e vetrosi, e proprietà fortemente dipendenti dalla loro storia passata.

Si è accennato in precedenza al differente comportamento dei granulari rispetto ai fluidi normali per quanto riguarda la pressione. Cerchiamo di capire meglio in cosa consistono tali differenze. Si consideri, ad esempio, un materiale granulare, racchiuso in un recipiente, che fluisce attraverso un foro posto all'estremità inferiore del contenitore; se viene applicata una forza di compressione al materiale fuoriuscito (che immaginiamo si sia depositato su una qualche superficie), si verifica che tale forza non viene trasmessa uniformemente verso il basso, ma forma un reticolo spaziale molto complesso di catene di forze [3]. Ciò equivale a dire che, a differenza di un fluido, la pressione non aumenta linearmente con la profondità, ma tende a scaricarsi in buona parte sulle pareti del contenitore. Questo comportamento è dovuto al fenomeno dell'*arching*, che consiste nella formazione di veri e propri archi a ridosso del foro di uscita del materiale, i quali influenzano fortemente la distribuzione delle forze all'interno del recipiente, e possono provocare, ad esempio, l'interruzione nel flusso di sabbia in una clessidra. Quello dell'*arching* è anche uno dei meccanismi in grado di spiegare la *legge di Janssen* sulla pressione. A partire da considerazioni fenomenologiche, Janssen ipotizzò, senza dare però una spiegazione completa del meccanismo, che la pressione di un mezzo granulare sulle pareti del contenitore fosse proporzionale alla pressione verticale. In base a questa assunzione, è quindi possibile scrivere la condizione di equilibrio per una porzione cilindrica di materiale di raggio R e spessore dh , risultante dalla competizione tra la forza peso e la forza d'attrito sulle pareti sommata alla pressione verticale:

$$\pi R^2 dh \rho g = 2\pi R dh \mu K p_v + \pi R^2 dp_v \quad (1.3)$$

Risolvendo questa equazione, egli giunse a mostrare che la pressione, oltre una certa profondità Λ , che dipende direttamente dal raggio R del contenitore (supposto cilindrico per semplicità), ed inversamente dal coefficiente di attrito dinamico μ , satura e non risulta

più dipendente dall'altezza del materiale nel recipiente [3]. In figura 1.1 sono riportati gli andamenti della pressione in funzione della profondità per diversi valori del parametro Λ ; è riportato inoltre lo stesso andamento funzionale nel caso di un fluido normale, l'acqua, al fine di mettere in evidenza il differente comportamento. Si ha infatti che per i liquidi vale la *legge di Stevino*

$$p_v(h) = \rho gh \quad (1.4)$$

che prevede un andamento lineare della pressione in funzione dell'altezza.

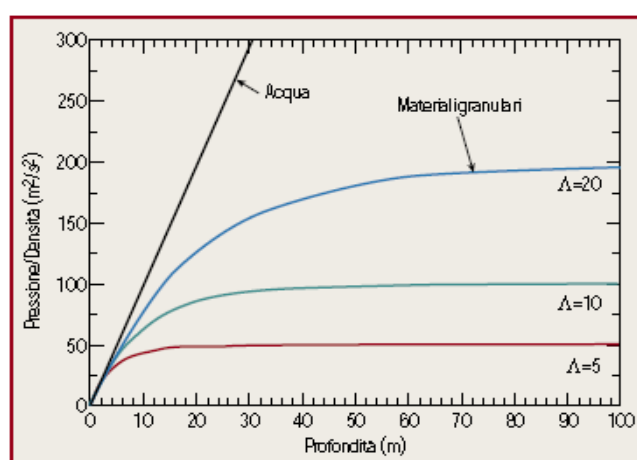


Figura 1.1: Andamenti della pressione al variare della profondità per diversi valori di Λ [3]

Un altro fenomeno nel quale il comportamento di un granulare risulta completamente diverso da quello di un liquido è il *mescolamento*. Tale fenomeno non è affatto banale e presenta caratteristiche che sono in netto contrasto anche con l'intuizione. In una miscela granulare che subisca l'azione di una forza esterna, ad esempio venendo agitata, contrariamente a quanto ci si aspetterebbe le varie componenti si possono separare invece di mescolarsi, ed il grado di mescolamento dipende strettamente dalla quantità di materiale presente nel contenitore; in particolare, si verifica che diminuendo il livello di riempimento, aumenta l'omogeneità della miscela.

In generale, quindi, non risulta possibile stabilire a priori se un materiale granulare, al termine di un generico processo di agitazione, si mescoli o se invece le sue componenti rimangano separate [3].

1.2 I fluidi: alcune approssimazioni

In questo paragrafo viene richiamato il concetto di fluido e vengono introdotte le approssimazioni entro le quali è possibile interpretare gli esperimenti descritti in questo lavoro.

Un fluido è una sostanza che si deforma illimitatamente se sottoposta a uno sforzo di taglio, indipendentemente dall'entità di quest'ultimo; il comportamento fluido è caratterizzato dalla *viscosità*, ed è proprio in questo contesto che si inseriscono le approssimazioni cui è stato fatto riferimento. Si suppone infatti che il fluido in esame sia *perfetto*, cioè la sua densità risulti costante nel tempo ed uniforme nello spazio, e siano trascurabili gli effetti di attrito viscoso. Queste assunzioni comportano una notevole semplificazione nel problema del deflusso da un recipiente; infatti, la prima impone che il liquido non possa subire compressioni o espansioni (e consente dunque di trascurare il lavoro che questi processi comportano), mentre la seconda permette di considerare nulli tutti gli sforzi di taglio (e pertanto le uniche forze che agiscono su un tale sistema sono forze di pressione). [4]

Si consideri una porzione di un tubo di flusso elementare² compresa tra le sezioni normali³ S ed S' ; in un generico intervallo di tempo infinitesimo dt la massa di fluido che attraversa la sezione S è

$$dm = \rho S v dt \quad (1.5)$$

Essendo il fluido incompressibile, la stessa quantità di massa attraverserà, nel medesimo intervallo di tempo, anche la sezione S' ; si può scrivere pertanto la cosiddetta *equazione di continuità*

$$Sv = S'v' \quad (1.6)$$

Si consideri ora un caso particolare: un liquido perfetto in moto stazionario in un recipiente rigido, sottoposto a forze di pressione e alla forza peso. Nota la forma del contenitore, è possibile ricavare l'*equazione di Bernoulli*, che contiene tutte le informazioni riguardo le caratteristiche del moto. Si procede analizzando separatamente i contributi dovuti ai due tipi di forze che agiscono sul sistema in un tempo infinitesimo dt . Per quanto riguarda il lavoro della forza peso, si ha che questo è legato unicamente allo spostamento di una quantità di massa dm dalla quota iniziale h_1 alla quota finale h_2

²il tubo ha sezione S abbastanza piccola da poter considerare la velocità del fluido costante in ogni punto di essa.

³in ogni punto la sezione è ortogonale alla velocità.

$$dL_g = dm g(h_1 - h_2) \quad (1.7)$$

Per quanto riguarda invece il lavoro delle forze di superficie sulle sezioni superiore ed inferiore del recipiente, si ottiene

$$dL_S = dF_1^{(S)} v_1 dt - dF_2^{(S)} v_2 dt = p_1 dS_1 v_1 dt - p_2 dS_2 v_2 dt \quad (1.8)$$

A partire dal *teorema dell'energia cinetica*⁴ ($dL_g + dL_S = dT$), si può scrivere

$$dm g(h_1 - h_2) + p_1 dS_1 v_1 dt - p_2 dS_2 v_2 dt = \frac{1}{2} dm v_2^2 - \frac{1}{2} dm v_1^2 \quad (1.9)$$

Tenendo conto della 1.5, si ricava infine il *teorema di Bernoulli*, che stabilisce l'invarianza della seguente quantità

$$p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{costante} \quad (1.10)$$

nota appunto come *equazione di Bernoulli*.

Le equazioni 1.6 e 1.10, ricavate a partire dalle approssimazioni di densità costante e di coefficiente di viscosità nullo, costituiscono dunque il punto di partenza per la descrizione di un *fluido ideale*, e sono infatti alla base della trattazione effettuata nel presente lavoro [4].

Per quanto riguarda lo studio dei fluidi portato avanti in questo lavoro, oltre al regime bernoulliano, esiste un altro 'caso limite' che è possibile trattare analiticamente, il *regime fortemente viscoso*, per il quale non risulta possibile trascurare gli effetti legati all'attrito viscoso del fluido. Condizioni sperimentali di questo tipo si realizzano facendo fluire il liquido in un capillare sufficientemente piccolo, mantenuto in posizione orizzontale in modo tale che il gradiente di pressione $\Delta P = \rho g h$, che agisce sul liquido, si scarichi tutto sul capillare e di conseguenza si abbia un regime di flusso esponenziale, come verrà ricavato nel capitolo 3.

⁴Il lavoro compiuto dalla risultante delle forze agenti su un punto materiale che si sposta da un punto A ad un punto B è pari alla variazione di energia cinetica del punto stesso.

Capitolo 2

Risultati sperimentali

In questa sezione sono descritti gli esperimenti effettuati e la tecnica mediante la quale sono stati realizzati: la videoacquisizione. Questa tecnica consiste nel riprendere l'esperimento con una videocamera, al fine di ottenere delle immagini digitali da poter successivamente analizzare al computer, mediante il programma di calcolo scientifico Matlab.

L'obiettivo dell'analisi dei video realizzati è quello di ricostruire le leggi del moto del sistema di interesse, per poi confrontarle tra loro e con i risultati raggiunti in esperimenti condotti in precedenza ([5]-[6]). Per ricostruire la legge oraria con la quale il materiale in esame defluisce, è stato studiato il moto del menisco, ossia la sezione superiore del materiale ripreso dalla videocamera. Quest'ultima è stata posizionata in modo da effettuare l'intera ripresa ad inquadratura fissa, al fine di poter osservare il progressivo abbassamento del livello del materiale (menisco) all'interno del contenitore.

Il programma di calcolo scientifico Matlab consente di importare un video in formato *avi* tramite la funzione *aviread('filename.avi')*. Una volta caricato, il video viene assegnato alla variabile *mov(f)*, dove *f* è un indice che rappresenta il frame in esame (per ogni frame, *mov* contiene tre matrici di pixel: una per l'intensità del rosso, una per l'intensità del verde e una per l'intensità del blu).

L'analisi è stata portata avanti 'frame per frame'; per ogni frame è stato analizzato il contenuto, in termini dell'intensità dei colori, di ciascun pixel. Dopo aver sommato, pixel per pixel, le intensità RGB dei tre colori, si è ottenuta una matrice, delle dimensioni di un frame (320x240), sulla quale sono state eseguite le operazioni descritte schematicamente di seguito:

- la matrice di interi a 8 bit contenente la somma delle intensità dei colori, viene trasformata in una matrice 'double', al fine di ottenere la seguente corrispondenza

$$0 \rightarrow NERO \quad (2.1)$$

$$255 \rightarrow BIANCO \quad (2.2)$$

- viene eseguita la derivata numerica (mediante il comando Matlab *diff*) su ogni riga della matrice risultante al fine di determinare la discontinuità tra zone chiare (fondo) e zone scure (liquido/granulare); in questo modo è possibile individuare la posizione del menisco, determinando la prima riga della matrice in corrispondenza della quale si riscontra tale discontinuità
- in una variabile temporanea vengono memorizzati gli indici delle righe corrispondenti ai massimi delle discontinuità e se ne calcola il valore medio lungo il menisco
- ciascuno degli indici memorizzati viene poi confrontato con tale valor medio e vengono scartati tutti i valori che si discostano da esso più del 15%; questo controllo viene effettuato al fine di eliminare eventuali irregolarità che comprometterebbero l'analisi dei dati
- dopo aver eseguito tale controllo, si ricalcola la media dei valori che rientrano nel range di accettabilità; tale media è proprio il valore del menisco che verrà usato come riferimento per il frame corrente
- la posizione del menisco viene memorizzata in un vettore di lunghezza pari al numero di frames del video

Quindi, una volta terminata l'iterazione su tutti i frames, è stato possibile ricavare l'evoluzione temporale del menisco del liquido/granulare (la risoluzione temporale è la stessa per i due esperimenti e pari a 1 frame, corrispondente a 0.04sec).

Di seguito è riportato il codice utilizzato per importare in Matlab i video acquisiti, per analizzare i dati ed estrarre le leggi orarie di interesse; tale codice, già descritto in dettaglio nei suoi aspetti principali nella discussione appena conclusa, contiene ulteriori e più specifici commenti accanto alle diverse istruzioni che lo compongono.

A titolo di esempio viene riportata in figura 2.1 un'immagine della matrice su cui è stata condotta l'analisi dei dati; tale matrice è il risultato dell'operazione di derivata numerica effettuata su ogni riga della matrice di partenza, contenente la somma delle intensità dei colori.

```

for f = 1:nframes                                % ciclo sui frames
    f;

    % memorizzo in tre matrici di appoggio il valore di RGB per ciascun pixel del frame corrente (f)
    a = mov(f).cdata(:,:,1);
    b = mov(f).cdata(:,:,2);                    % valore di RGB (rosso, verde, blu) per ogni pixel
    c = mov(f).cdata(:,:,3);

    g = a+b+c;                                    % sommo intensità di RGB

    g1 = double(g);                               % 0 --> NERO; 255 --> BIANCO
    g1_ud = flipud(g1);

    app1 = diff(g1_ud,1,1);                       % con questa operazione si individuano le discontinuità
                                                % tra zone scure (materiale) e zone chiare (sfondo) per
                                                % determinare la posizione del menisco

    [Y,I] = max(app1);                           % in una matrice d'appoggio (I) vengono memorizzati
                                                % gli indici corrispondenti alle righe in cui si ha un
                                                % massimo nella derivata

    M(f) = mean(I(I~=1));
    M1 = M(f)*0.15;                              % valore soglia per tenere solo gli indici che non si
                                                % discostano dalla media più del 15%

    app=I>=(M(f)-M1)&I<=(M(f)+M1);             % in app vengono inseriti solo i valori di I che cadono
                                                % nell'intervallo scelto; questa operazione però è di tipo
                                                % booleano, quindi tramite la funzione find, si
    app_I=I(find(app==1));                       % recuperano i valori degli indici di I che verranno
                                                % utilizzati per fare la media

    menisco_s(f) = mean(app_I);                 % vettore che contiene il valore medio del menisco
                                                % per ogni frame
end

```

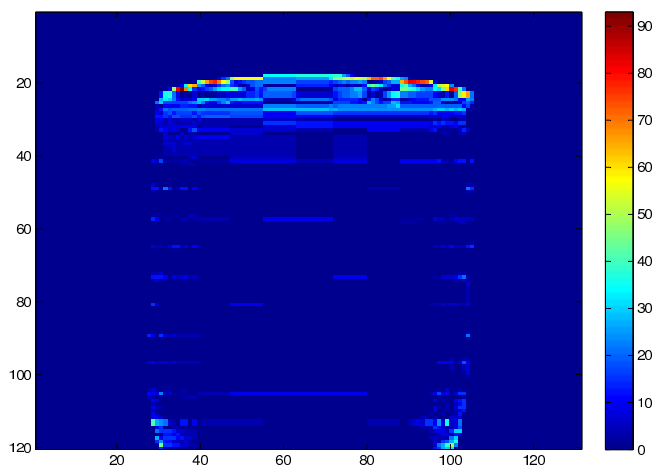


Figura 2.1: Matrice su cui è stata effettuata l'analisi dei dati.

Nei paragrafi che seguono sono riportate le descrizioni degli esperimenti effettuati ed una prima stima qualitativa dei risultati ottenuti, che saranno discussi nel dettaglio nel prossimo capitolo.

2.1 Flusso di sabbia da una clessidra

Scopo di questo lavoro, come già accennato, è mostrare alcune delle proprietà peculiari della materia granulare, riproducendo un esperimento i cui risvolti sono già noti dalla letteratura. A tal fine ci si è dedicati allo studio del regime di deflusso di un granulare molto comune, la sabbia, da un recipiente altrettanto comune, una clessidra. L'apparato strumentale, molto semplice, è composto dai seguenti elementi:

- una clessidra
- una videocamera digitale
- un foglio bianco da usare come sfondo
- una lampada da usare come fonte di luce

In figura 2.2 è riportato, a titolo di esempio, il frame iniziale del video realizzato.

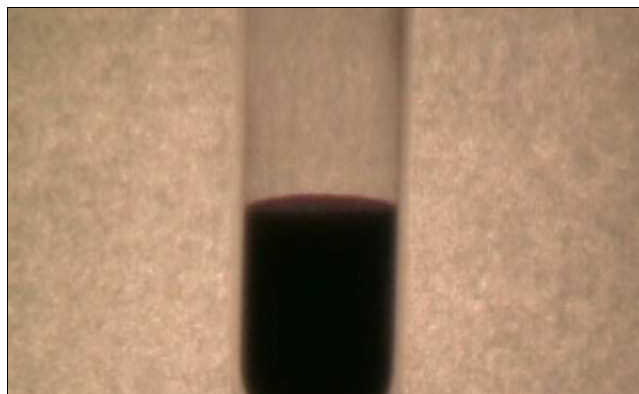


Figura 2.2: Frame iniziale del video relativo al materiale granulare

In fase di realizzazione dell'esperimento, basandosi sul tipo di analisi scelta, è risultato essenziale creare un forte contrasto tra il soggetto della ripresa, la sabbia, e lo sfondo circostante; solo in tal modo, infatti, sarebbe stato possibile individuare, nei vari frames, il

livello superiore della sabbia e avrebbero avuto senso tutte le operazioni previste nell'analisi del video. È risultato dunque fondamentale il ruolo giocato dalla luce; è stato infatti necessario creare delle condizioni di illuminazione tali da massimizzare il contrasto tra la sabbia e lo sfondo, al fine di evitare riflessi indesiderati, che avrebbero reso impossibile l'analisi. Pertanto, l'esperimento è stato condotto al buio, con la lampada come unica fonte di luce, posizionata dietro al foglio bianco.

Al fine di fornire una stima qualitativa dell'andamento del menisco della sabbia al variare del tempo, in figura 2.3 sono riportati alcuni frames del video realizzato, presi ad intervalli di tempo regolari.

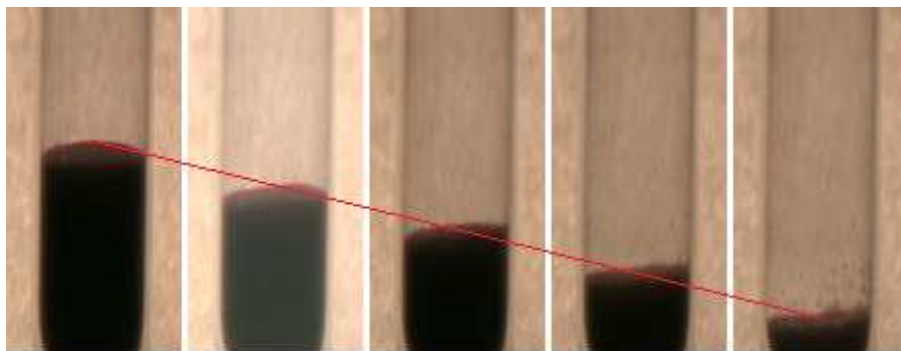


Figura 2.3: Andamento qualitativo del menisco della sabbia ad intervalli di tempo regolari

Una discussione più dettagliata dei risultati ottenuti sarà fornita nel prossimo capitolo.

2.2 Flusso di acqua in regime bernoulliano

Come già detto, al fine di evidenziare il fatto che i granulari si comportano in maniera diversa rispetto agli altri stati della materia, è stato realizzato un ulteriore esperimento, basato sulla medesima procedura, utilizzando però questa volta un liquido, l'acqua, che fluisce da una piccola apertura circolare. Anche in questo caso, come per quello della sabbia, l'apparato strumentale è molto semplice:

- una bottiglia di plastica
- una videocamera digitale
- un foglio bianco da usare come sfondo
- una lampada da usare come fonte di luce

L'esperimento è stato effettuato utilizzando un contenitore cilindrico, la bottiglia di plastica rovesciata, con alla base un foro di circa 2mm di diametro. In figura 2.4 è riportato, sempre a titolo di esempio, il frame iniziale del video realizzato.

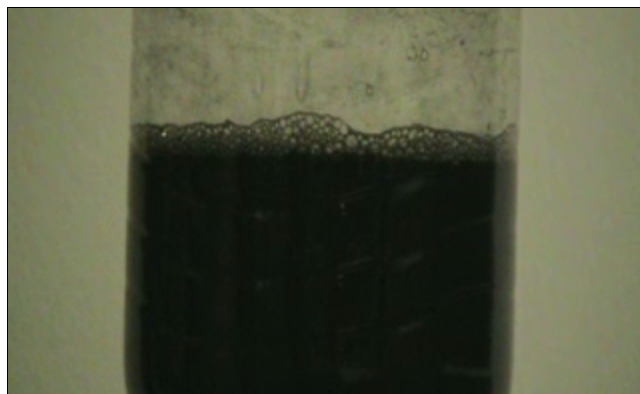


Figura 2.4: frame iniziale del video con l'acqua

L'analisi del video è stata condotta in modo del tutto analogo a quanto fatto per il granulare, e pertanto non viene riportata una descrizione dettagliata del procedimento. In ogni caso si sottolineano nuovamente l'importanza dell'inquadratura fissa della video-camera (al fine di osservare l'abbassamento del livello del liquido nel contenitore), e quella della massimizzazione del contrasto tra liquido e sfondo circostante, ragion per cui l'acqua utilizzata nell'esperimento è stata tinta di nero mediante inchiostro di china.

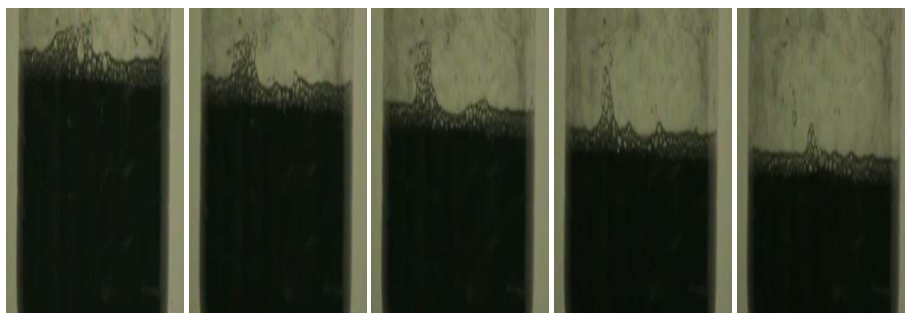


Figura 2.5: Andamento qualitativo del menisco dell'acqua ad intervalli di tempo regolari

Anche in questo caso, in figura 2.5 vengono riportati alcuni frame del video realizzato, presi ad intervalli di tempo regolari, sempre con l'obiettivo di fornire una stima qualitativa dell'andamento del menisco del materiale in esame al variare del tempo.

2.3 Flusso di acqua in regime fortemente viscoso

Come già accennato nel par. 1.2, si è deciso di concentrare l'attenzione, per quanto riguarda i fluidi, sulle due approssimazioni che è possibile trattare analiticamente e dunque si è deciso di riprodurre un ulteriore esperimento, oltre quello appena descritto (cfr par. 2.2), riguardante il flusso in regime viscoso. È stato pertanto studiato il flusso di acqua da un capillare. Questo esperimento è di particolare interesse, dal momento che mette in luce il fatto che, in determinate circostanze sperimentali, quando cioè non risulta possibile trascurare gli effetti dell'attrito viscoso del liquido, il flusso dell'acqua presenta una dipendenza dal tempo nota.

L'esperimento condotto utilizzando il capillare è stato realizzato in modo del tutto analogo ai primi due, seguendo la medesima procedura sperimentale ed applicando lo stesso tipo di analisi dati, salvo per qualche accorgimento che è stato necessario prendere e che verrà discusso nel seguito. L'apparato strumentale utilizzato, mostrato in figura 2.6, è il seguente:

- un tubo di plexiglass di forma cilindrica (di diametro $D = 1\text{cm}$)
- un tubo di plastica flessibile
- un capillare di vetro (di diametro $d = 2\text{mm}$)
- una videocamera digitale
- un foglio bianco da usare come sfondo
- una lampada da usare come fonte di luce

Il tubo di plastica, collegato all'estremità inferiore del tubo di plexiglass è stato collegato al capillare di vetro; quest'ultimo è stato poi fissato in posizione orizzontale mediante un apposito supporto.

Anche in questo caso, come nei precedenti, è stato fondamentale avere un forte contrasto tra il liquido in esame e lo sfondo circostante, e pertanto, l'acqua utilizzata è stata nuovamente tinta di nero mediante inchiostro di china.



Figura 2.6: Apparato strumentale utilizzato nel caso di flusso da un capillare

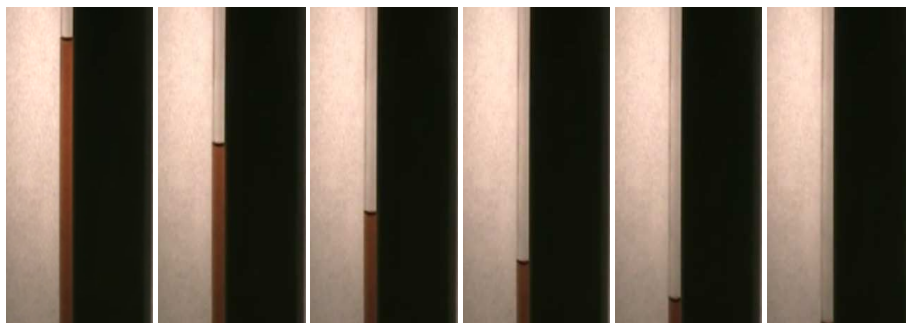


Figura 2.7: Andamento qualitativo del menisco dell'acqua nel caso di flusso da un capillare

In modo del tutto analogo a quanto fatto per i due esperimenti appena descritti, viene riportata anche in questo caso una sequenza di frames del video presi ad intervalli di tempo regolari, al fine di mostrare, in modo qualitativo, l'andamento riscontrato.

Si è accennato prima ad alcuni accorgimenti che sono stati necessari al fine di riuscire a ricavare dal video la legge oraria del moto cercata. Come è possibile osservare in figura 2.6, l'apparato è costituito da un supporto metallico verticale che era impossibile non includere

nella ripresa; al fine di eliminare questo 'disturbo', si è pensato di agire direttamente sui frames del video, quindi al momento dell'analisi dati: è stata pertanto 'tagliata' la matrice che rappresenta il singolo frame in modo da eliminare tutta la parte in cui era contenuto tale supporto, senza però compromettere l'analisi dei dati (quella parte di pixel, infatti, non aveva alcun ruolo nella determinazione del menisco dell'acqua).

Capitolo 3

Discussione dei risultati

Nel presente capitolo verranno discussi i risultati ottenuti negli esperimenti e verrà effettuato un confronto tra di essi e con i risultati noti dalla letteratura ([5]-[6]).

Obiettivo di questa dissertazione, come già detto, era studiare il comportamento dei materiali granulari in determinate condizioni sperimentali e mettere in luce alcune differenze sostanziali tra questi e i fluidi. Ciò che si voleva verificare era il diverso comportamento in regime di deflusso da un recipiente; ci si attendeva infatti di riscontrare un andamento del flusso in funzione del tempo piuttosto diverso nei casi di interesse. In particolare, si era previsto di osservare i seguenti andamenti:

- lineare nel caso della sabbia
- non lineare (quadratico) nel caso dell'acqua in approssimazione di fluido ideale
- esponenziale in regime fortemente viscoso (acqua che fluisce da un sottile capillare)

A partire dai grafici riportati nelle figure 3.1, 3.2 e 3.3, si può osservare come gli andamenti attesi siano stati effettivamente riscontrati a livello sperimentale.

In figura 3.1 è riportato il grafico relativo all'andamento ottenuto per l'abbassamento del menisco della sabbia nel tempo; si ricorda che l'intervallo temporale è stato ricavato a partire dall'informazione sul numero di frames al secondo estratta dal video ($1\text{frame} \sim 0.04\text{sec}$)

Dal grafico si vede come tale andamento risulti, con buona approssimazione, lineare nel tempo. È necessario comunque sottolineare che l'andamento rettilineo atteso non è riprodotto perfettamente dai dati sperimentali. Nella parte centrale della curva (figura 3.1), infatti, si osserva una sorta di avvallamento, che può essere ricondotto allo strano comportamento della sabbia in alcuni momenti della ripresa, nei quali si è verificata la

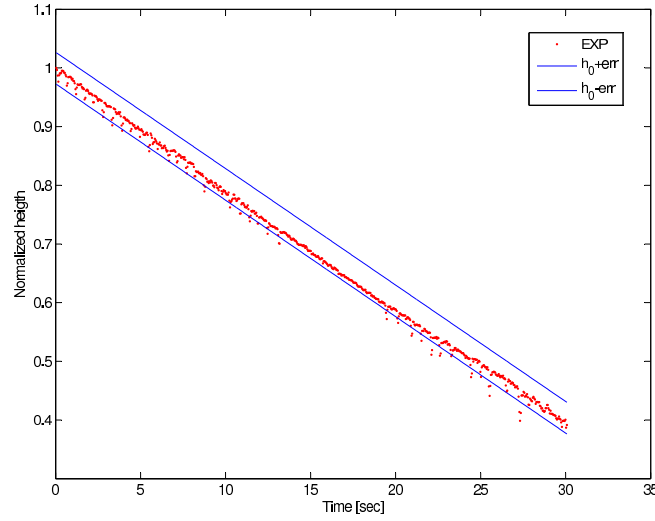


Figura 3.1: Andamento del livello della sabbia in funzione del tempo. Le linee continue rappresentano le curve teoriche valutate tenendo conto dell'errore sulla misura della quota iniziale del materiale

formazione, sulla sezione superiore del materiale, di piccole voragini, non visibili nel video a causa delle modalità scelte per effettuare la ripresa.

La curva teorica che descrive il moto del menisco della sabbia è la retta di equazione

$$h(t) = h_0 - \sqrt{\frac{h_0}{A}}t \quad (3.1)$$

dove con A è stata indicata la seguente quantità

$$A = \frac{1}{2g} \left[\frac{S_1^2}{S_2} - 1 \right] \quad (3.2)$$

e S_1 ed S_2 sono le sezioni rispettivamente superiore ed inferiore del recipiente utilizzato.

Al fine di rendere evidente la bontà dei dati, in figura 3.1 sono riportate due rette teoriche ottenute, a partire dalla relazione 3.1, tenendo conto dell'incertezza sulla misura della quota iniziale di materiale presente nella clessidra. Risulta evidente come i dati sperimentali raccolti cadano nell'intervallo dato dalle due rette teoriche.

Come già spiegato nel paragrafo 1.2, l'esperimento con l'acqua è stato realizzato assumendo che il liquido potesse essere considerato un fluido ideale e si potessero dunque

trascurare gli effetti di attrito viscoso e i processi di compressione o espansione del fluido. Per determinare la forma funzionale della legge oraria del flusso di acqua in tale approssimazione, si è dunque partiti dalla legge di Bernoulli e dall'equazione di continuità (cfr eqⁿⁱ 1.10 e 1.6).

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \frac{1}{2}\rho v_0^2 \quad (3.3)$$

$$vS_1 = v_0S_0 \quad (3.4)$$

Ricordando che $v = \dot{h}$, ricavando un'espressione per v_0 dalla seconda equazione, e sostituendo nella prima, si ottiene

$$\frac{1}{2}\dot{h}^2 + gh = \frac{1}{2}\left(\frac{S_1}{S_0}\right)^2\dot{h}^2 \quad (3.5)$$

$$A\dot{h}^2 - h = 0 \quad (3.6)$$

$$\dot{h} = \pm\sqrt{\frac{h}{A}} \quad (3.7)$$

avendo posto

$$A = \frac{1}{2g}\left[\left(\frac{S_1}{S_0}\right)^2 - 1\right] \quad (3.8)$$

Si sceglie la soluzione negativa e si risolve per separazione di variabili:

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{dt}{\sqrt{A}} \quad (3.9)$$

$$\int_{h_0}^{h(t)} \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{A}} \quad (3.10)$$

$$2(\sqrt{h} - \sqrt{h_0}) = -\frac{t}{\sqrt{A}} \quad (3.11)$$

Portando il secondo termine dentro la parentesi a secondo membro ed elevando al quadrato l'equazione, si ottiene la soluzione cercata

$$h(t) = h_0 - \sqrt{\frac{h_0}{A}}t + \frac{1}{4A}t^2 \quad (3.12)$$

da cui risulta evidente una dipendenza non lineare del flusso dell'acqua dal tempo.

In figura 3.2 è riportato il grafico relativo all'andamento del livello dell'acqua in funzione del tempo. Analogamente a quanto fatto per la sabbia, anche in questo grafico sono riportate due curve teoriche, ottenute sempre tenendo conto dell'incertezza sulla misura della quota iniziale dell'acqua nel contenitore; dal grafico si vede come tale andamento non sia lineare e cada nell'intervallo definito dalle due curve teoriche.

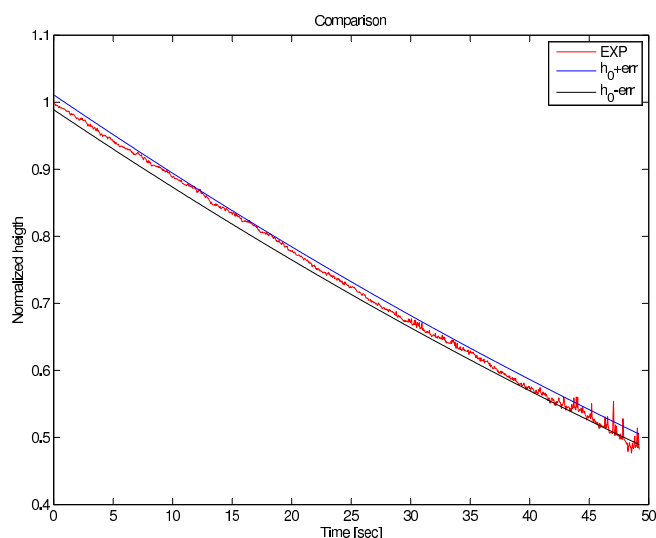


Figura 3.2: Andamento nel tempo del livello dell'acqua in regime bernoulliano. Le linee continue rappresentano le curve teoriche valutate tenendo conto dell'errore sulla misura della quota iniziale del materiale

Nel grafico relativo al liquido in regime bernoulliano (fig. 3.2) si osserva che i dati sperimentali riproducono piuttosto bene la curva teorica attesa, anche se nella parte finale risultano disturbati; ciò può essere attribuito alle inevitabili vibrazioni dell'apparato sperimentale cui è stato soggetto il liquido in fase di realizzazione dell'esperimento, e alle non perfette condizioni di ripresa. Ciononostante, il risultato ottenuto può essere considerato consistente e costituisce dunque un buon termine di paragone per il confronto che ci si era proposti di fare.

Per quanto riguarda il flusso di acqua da un capillare, l'esperimento realizzato ha consentito di ottenere un andamento del menisco consistente con la legge oraria attesa, di tipo esponenziale, che si ottiene a partire dalla *legge di Poiseuille*

$$\Delta P = K v \quad (3.13)$$

Sapendo che vale la Legge di Stevino

$$\Delta P = \rho g h \quad (3.14)$$

si ottiene:

$$v = \frac{dh}{dt} = \frac{h}{\tau} \quad (3.15)$$

$$h(t) = h(0)e^{-t/\tau} \quad (3.16)$$

dove τ è la costante di tempo del fenomeno e dipende dalle caratteristiche geometriche del capillare; si ha in particolare

$$\tau = \frac{S}{\rho g} \frac{l}{r^4} \frac{8}{\pi} \eta \quad (3.17)$$

dove η è il coefficiente di viscosità, caratteristica intrinseca del liquido.

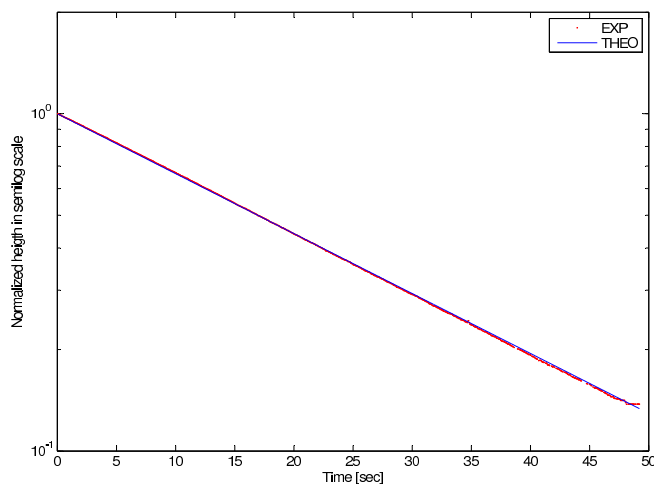


Figura 3.3: Andamento nel tempo del livello dell'acqua che fluisce da un capillare in scala semilogaritmica

In figura 3.3 è riportato l'andamento del menisco dell'acqua in scala semilogaritmica, al fine mostrare la bontà dei dati sperimentali acquisiti.

Obiettivo dell'esperimento era osservare un andamento esponenziale del menisco dell'acqua in regime fortemente viscoso e, una volta riscontrato effettivamente tale andamento, è stato eseguito un fit esponenziale sulla curva al fine di ricavare il termine correttivo di offset che tiene conto della quota $h = 0$, non considerata in fase di realizzazione dell'esperimento; l'offset così ricavato è stato quindi aggiunto alla curva. Il grafico in figura 3.3 è proprio quello ottenuto tenendo conto di tale correzione.

Come già detto nel paragrafo 2.3, durante l'analisi dei dati è stato necessario prendere alcuni accorgimenti al fine di ottimizzare la qualità della ripresa; questo non ha però compromesso in alcun modo l'esito dell'analisi.

I risultati ottenuti negli esperimenti realizzati, nei limiti legati alla procedura sperimentale seguita, rappresentano una verifica delle proprietà di granulari e fluidi in regime di efflusso; è infatti possibile confrontare tali risultati con quelli noti dalla letteratura, ossia ottenuti in esperimenti condotti in studi precedenti e con modalità diverse.

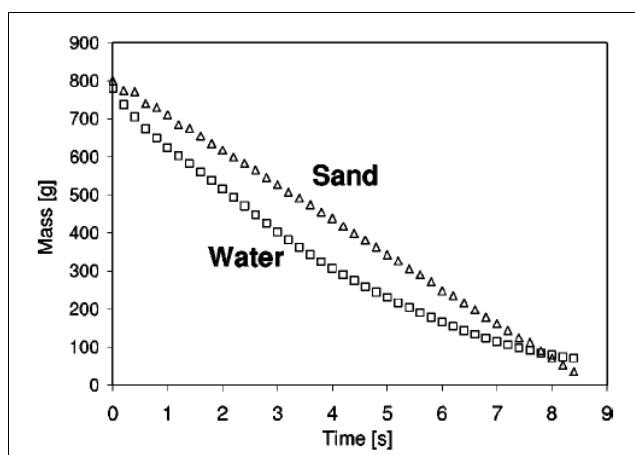


Figura 3.4: Dipendenza temporale della massa (di acqua e sabbia) che si accumula sulla bilancia [6]

In particolare in questi casi si è misurata la variazione della massa dei materiali in esame. L'apparato sperimentale consiste in questo caso non di una videocamera, bensì di una bilancia digitale, interfacciata con un computer, che raccoglie il materiale defluito dal contenitore. Nel caso granulare, questo tipo di approccio ([5]-[6]) risulta più efficace di quello utilizzato nella presente trattazione.

Nelle figure 3.4 e 3.5 sono riportati i risultati ottenuti negli esperimenti cui è stato

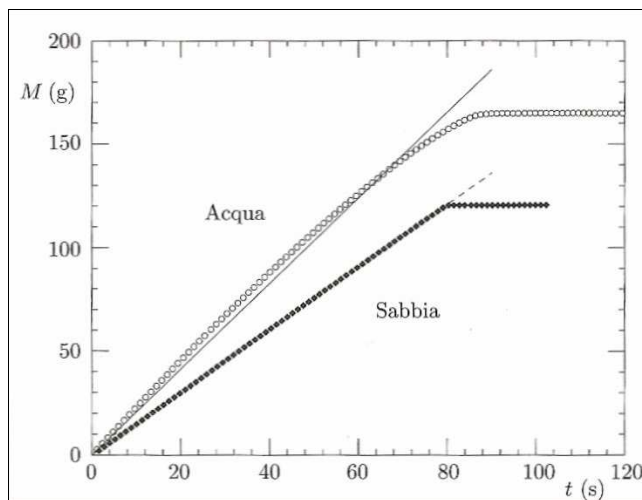


Figura 3.5: Andamento della massa di acqua e sabbia in funzione del tempo [5]

fatto riferimento [5]-[6] in precedenza; in entrambi i grafici sono presenti sia gli andamenti relativi al flusso della sabbia sia quelli relativi al flusso dell'acqua in regime bernoulliano. Si osserva come gli andamenti ottenuti nel presente lavoro risultino con essi consistenti.

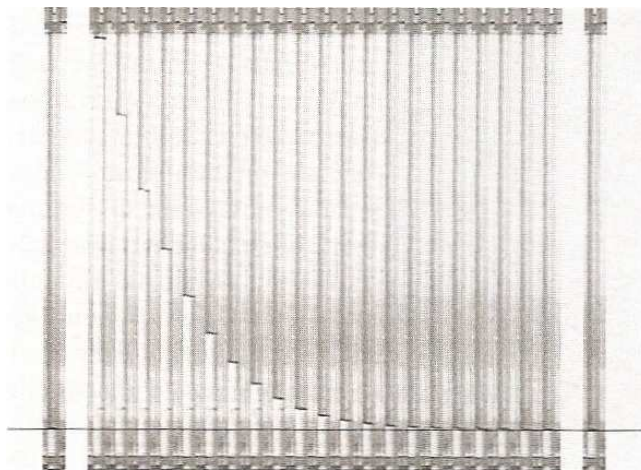


Figura 3.6: Sequenza di immagini riprese ad intervalli di tempo regolari che illustrano lo svuotamento di un recipiente cilindrico attraverso un capillare [5]

In figura 3.5 sono inoltre riportate due rette, una sovrapposta ai dati relativi alla sabbia, l'altra sovrapposta a quelli relativi all'acqua, proprio per evidenziare come nel primo caso l'andamento sia perfettamente lineare nel tempo, mentre nel secondo questa caratteristica venga meno.

Infine, per quanto riguarda il flusso di acqua da un capillare, è possibile effettuare un confronto con un esperimento effettuato in precedenza utilizzando una tecnica simile a quella descritta nel presente lavoro [5]. Tale esperimento, infatti, è stato condotto con il medesimo apparato strumentale (cfr fig. 2.6) registrando immagini digitali dell'altezza del liquido all'interno del tubo di plexiglass ad intervalli di tempo regolari. L'andamento ottenuto, riportato in figura 3.6, è chiaramente di tipo esponenziale, e dunque il risultato ottenuto in questo lavoro può essere considerato in buona approssimazione consistente con quello appena descritto.

Conclusioni

Il lavoro svolto e descritto nella presente dissertazione ha consentito di effettuare uno studio, piuttosto accurato, di alcune proprietà notevoli di uno stato singolare della materia, lo stato granulare, e di confrontare questo tipo di materiali con i fluidi normali, evidenziando alcune tra le principali differenze. È stato possibile verificare, infatti, che il flusso di un granulare è costante nel tempo, mentre tale caratteristica non risulta propria dei fluidi normali, per i quali si presenta, invece, una variazione abbastanza evidente del flusso allo scorrere del tempo. La legge funzionale che descrive il moto del livello del liquido in regime bernoulliano in funzione del tempo è stata ricavata analiticamente (cfr cap. 3), in modo tale da poter verificare la bontà dei risultati ottenuti sperimentalmente. È stato infine realizzato un esperimento riguardante l'altro caso limite di deflusso di un liquido, ossia quello in regime fortemente viscoso, attraverso un capillare; anche in questo caso la legge funzionale che descrive il moto è stata ricavata analiticamente (cfr cap. 3).

Tutti e tre gli andamenti previsti sono stati effettivamente osservati dall'analisi dei dati sperimentali acquisiti, e sono risultati in buon accordo con quanto atteso dalla teoria.

Da un confronto con i risultati noti dalla letteratura ([5]-[6]), inoltre, è stato possibile verificare la consistenza dei dati raccolti, come anche la validità della tecnica sperimentale adottata per realizzare gli esperimenti descritti.

A tal proposito, è importante sottolineare che chiaramente esistono dei margini di miglioramento. Per quanto riguarda i granulari, infatti, sarebbe interessante realizzare un esperimento utilizzando contenitori a diametro variabile, al fine di osservare la dipendenza del flusso dalle dimensioni del foro di uscita. Per quanto riguarda i fluidi, invece, si potrebbe migliorare la qualità dell'apparato strumentale, rendendolo meno 'artigianale' di quello utilizzato nel presente lavoro. Nei primi due esperimenti descritti, infatti avere a disposizione un contenitore studiato opportunamente avrebbe probabilmente evitato l'insorgere di alcuni problemi in fase di realizzazione dei video, come anche la necessità di alcuni accorgimenti che è stato invece essenziale prendere. Nel caso del deflusso da un capillare, invece, l'apparato a disposizione si è rivelato adatto alle esigenze sperimentali.

Bibliografia

- [1] M. Yersel, *The Flow of Sand*, The Physics Teacher **38** (2000) 290.
- [2] X. Wu, K.J. Måløy, A. Hansen, M. Ammi, D. Bideau, *Why Hour Glasses Tick*, Phys. Rev. Lett. **71** (1993) 1363.
- [3] U. Marini Bettolo, A. Puglisi, A. Vulpiani, *La Forza dei Granelli*, Le Scienze **408** (2002) 75.
- [4] C. Mencuccini, V. Silvestrini, *Fisica I* (Liguori Editore) (1996).
- [5] A. Filipponi, *Introduzione alla Fisica* (Zanichelli) (2005).
- [6] J. Flores, G. Solovey, S. Gil, *Flow of sand and a variable mass Atwood Machine*, Am. J. Phys. **71** (2003) 715.